Jednoducho o matematike

Prehľad matematiky zo základnej školy

Spracoval: Vladimír Rýs

(voľne prístupná práca o matematike základnej školy)

1. Úvod

Prečo vlastne chcem napísať tento prehľad?

Dôvod je úplne jednoduchý pri doučovaní detí v deviatom ročníku základnej školy som zistil niektoré nedostatky. Tieto nedostatky by som chcel odstrániť vysvetlením učiva základnej školy. Toto vysvetlenie by nemalo byť ani tak matematické, ako jednoduché, logické a pochopiteľné.

Štruktúra by mala byť zhruba podľa postupu výučby v jednotlivých ročníkoch na základnej škole.

2. Čísla

Prirodzené čísla: 1,2,3,4,5 ... nie je tam nula a záporné čísla označenie N

Celé čísla ...-3,-2,-1,0,1,2,3 ... je tam nula záporné a kladné čísla označenie Z

Racionálne čísla sú tam prirodzené čísla +celé čísla +desatinné čísla + zlomky označenie Q

Reálne čísla sú tam prirodzené čísla+ celé čísla+ racionálne čísla+ iracionálne čísla (nerozumné) napríklad π =3,14159 označenie R

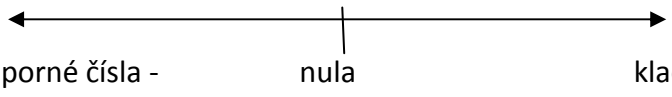
K tomuto netreba žiadny komentár to je axioma nedokazuje sa preto, lebo je to zrejmé.

3. Sčítavanie a odčítavanie

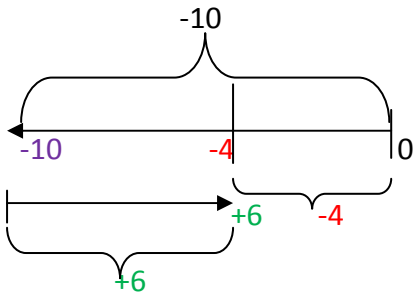
Skúsme sčítať dve ľubovoľné čísla napríklad 2+3 každý povie 5 úplne samozrejme, ale ako k tomu prišiel. Úplne jednoduchá odpoveď je tak ma to naučili. Dve jablká plus tri jablká to je spolu päť jabĺk. To je jasné.

Dajme si však zložitejší príklad: -10+6 čo teraz ?

Skúsime použiť číselnú os.



čísla vynesieme na číselnú os



Príklad -10+6= -4

Na číselnú os vynesieme čísla tak, ako ich budeme sčítavať najprv -10 smerom doľava podľa konvencie pre záporné čísla a vyznačíme -10 na osi (fialové číslo). K tomuto bodu potom vynesieme číslo +6 do od bodu -10 smerom doprava (zelené číslo). Výsledok je -4 (červené číslo).

Ideme skúsiť ďalšie príklady bez vysvetlenia: -25-60=-85, -25+60=+35, 25+45=70

Ak sú znamienka čísiel rovnaké čísla vždy sčítame z pred výsledok dáme také znamienko ako mali čísla.

Ak sú znamienka rôzne čísla odčítame a výsledné znamienko je to, ktoré stojí pri väčšom čísle.

4. Základné pojmy, ktoré sa často mýlia

Súčet operácia sčítanie znak +

Rozdiel operácie odčítanie znak –

Súčin operácia násobenie znak . (krát)

Podiel operácia delenie znak : (delenie); (delenec : deliteľ= podiel) alebo v zlomku

$$\frac{delenec}{deliteľ} = podiel$$

5. Aritmetika a algebra

Najprv začneme s rozdielom medzi aritmetikou a algebrou : Aritmetika používa čísla algebra používa písmená symboly.

Vysvetlíme si jednoduché pojmy

5.1 Komutatívny zákon hovorí o zámene môžeme ho použiť pri sčítaní a odčítaní

3-5+6-8=-5-8+6+3

a+b=b+a, -a-b=-b-a

3+6=6+3 -5-9=-9-5

pozor neplatí a-b≠b-a vyjadrenie v číselnej forme 6-9≠9-6=>-3≠3 to znamená že to nie je správna úprava.

Znak =>vyplýva

Pozor ďalej neplatí a/b≠b/a a:b≠b:a vyjadrenie v číselnej forme 5/2≠2/5=>2,5≠0,4

5.2 Asociatívny zákon hovorí o združovaní v podstate o používaní zátvoriek

(a+b)+c=a+(b+c) v číselnej forme (5+3)+9=5+(3+9)=>17=17

5.3 Distributívny zákon hovorí o roznásobovaní

a.(c+d)=a.c+a.d

používame pravidlá pre násobenie **+ . + = +**

- . - = +

+ . - = -

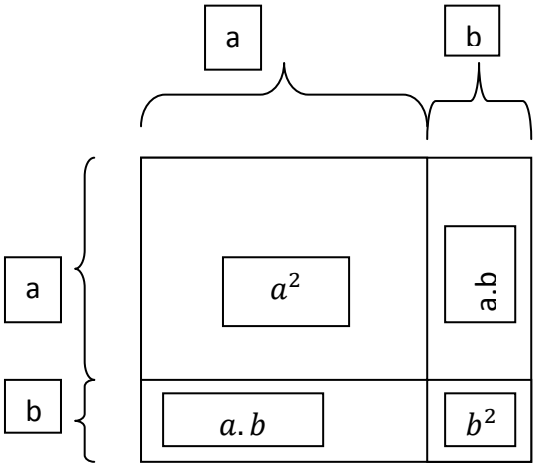
- . + = -

Príklad : -2.(5+7) tento príklad môžeme riešiť dvoma spôsobmi a to tak, že vypočítame zátvorku a vynásobíme mínus dvoma. =>-2.12=-24 alebo to môžeme vyriešiť roznásobením čo vyzerá nasledovne =>(-2).5+(-2).7=-10+(-14)=-24. Čo nás môže viesť k zovšeobecneniu že a.(b+c)=a.b+a.c
a máme všeobecný vzorec pre výpočet.

Skúsme zložitejší príklad: (a+b).(c+d)=a.c+a.d+b.c+b.d odvodili sme vzorec a skúsme či funguje
Príklad: (2+6).(9+4)=2.9+2.4+6.9+6.4=18+8+54+24=104 riešenie roznásobením
(2+6).(9+4)=8*13=104 riešenie najprv vykonané matematické úkony v zátvorkách.

$príklad: (a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$ dôležité
$odvodenie\ \ aritmetické: (a+b).(a+b) = a.a + a.b + b.a + b.b = a^2 + 2.a.b + b^2$

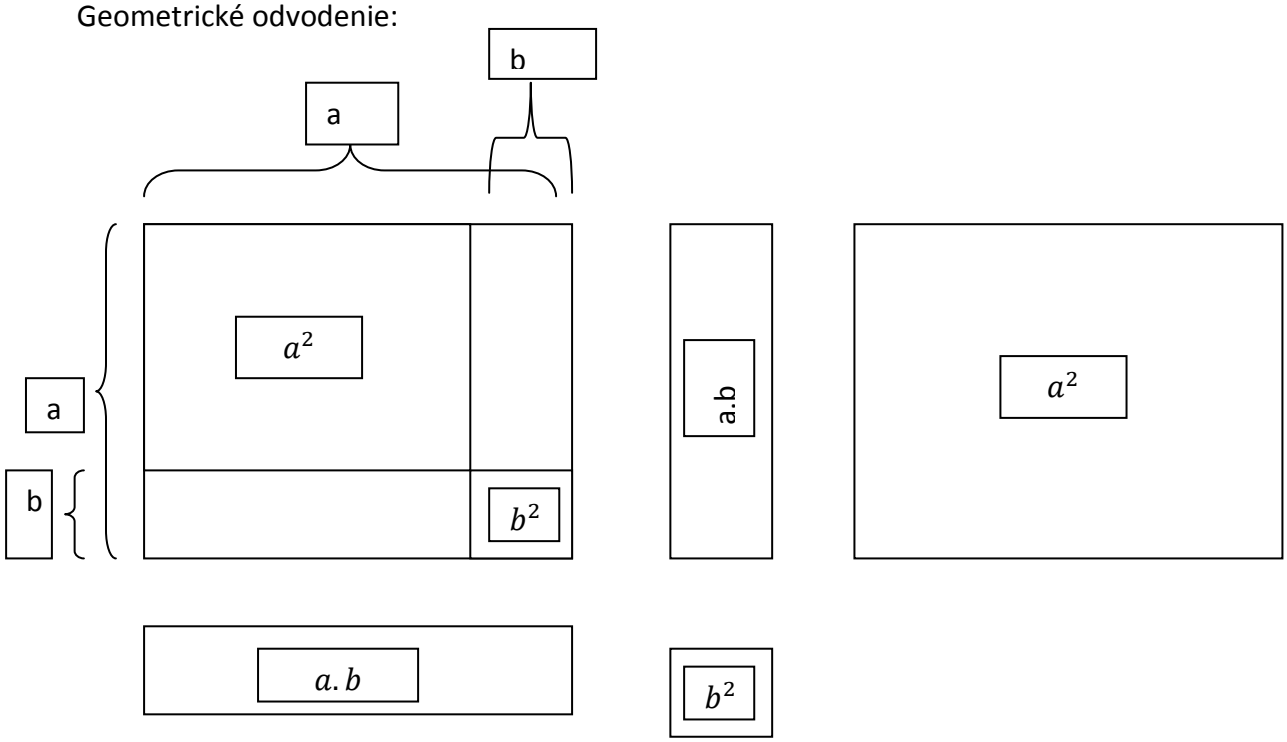
Geometrické odvodenie:



$príklad: (a-b)^2 = a^2 - 2.a.b + b^2$

$odvodenie\ aritmetické: (a-b).(a-b) = a.a - ab - ba + b.b = a^2 + 2.a.b + b^2$

Geometrické odvodenie:



K týmto obrázkom nie je nutné ďalšie vysvetlenie.

Ešte skúsme odvodiť jeden vzorec, ktorý bude potrebný pre naše ďalšie úvahy:

$(a+b).(a-b) = a.a - a.b + b.a - b.b = a^2 - b^2$ potom platí vzťah

$(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$

Napíšme zlomok

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Platí ako pre násobenie aj delenie teda aj pre zlomky nasledovné

+ : + = +

- : - = +

+ : - = -

-. + = -

Ešte jednu poznámku, aby sa nezabudlo a to mínus pred zátvorkou.

Dôležité : Ak je pred zátvorkou mínus v zátvorke sa menia znamienka na opačné

Ak je pred zátvorkou plus v zátvorke zostanú pôvodné znamienka

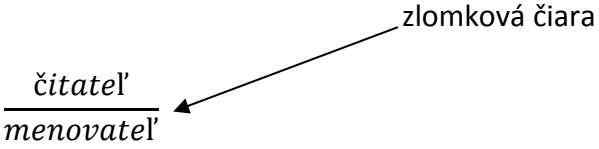
Príklad: -(-5a+3ab-9b+2b+6ab+b)=+5a-3ab+9b-2b-6ab-b=+5a-9ab+6b

Príklad: +(-5a+3ab-9b+2b+6ab+b)=-5a+3ab-9b+2b+6ab+b=-5a+9ab-6b

Príklad: $(x-1).(x+1) = x.x + x - x - 1.1 = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$

6. Zlomky

Zlomok je časť celku.



Zlomok je pravý ak je čitateľ menší ako menovateľ $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{16}{3\,1}$

Nepravý zlomok je keď má zlomok čitateľa väčšieho ako menovateľa a vždy je ho možné upraviť na zmiešané číslo a to na celé číslo a zlomok.

$Príklad$: $\frac{7}{3} = 2\ \frac{1}{3}$ ako sme dostali tento výsledok => 7:3=2 zvyšok 1 (2x3=6 a zvyšok 1) zvyšok zapíšeme vo forme zlomku $\frac{1}{3}$, lebo sme delili trojkou.

$Príklad$: $\frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$ =>11:3=3 zvyšok 2 zapíšeme ako $\frac{2}{3}$

Tieto dva príklady nám ukazujú ako dostať z nepravého zlomku zmiešané číslo.

Skúsme aplikovať opačný postup ako získať zo zmiešaného čísla zlomok:

Príklad: $3\frac{2}{3} = \frac{3.3+2}{3} = \frac{11}{3}$ popis výpočtu: čitateľ = menovateľ vynásobený celým číslom pred zlomkom spočítame s čitateľom zlomku ; menovateľ =opíšeme pôvodný

Príklad : $2\frac{1}{3} = \frac{2.3+1}{3}\frac{7}{3}$

6.1 Desatinné čísla a zlomky

Ak vydelíme čitateľa zlomku menovateľom získame desatinné číslo: $\frac{1}{2} = 1:2 = 0{,}5$

$\frac{3}{4} = 3:4 = 0{,}75$

$\frac{22}{7} = 22:7 = 3{,}1429$

6.2 Sčítavanie a odčítavanie zlomkov

Zlomky sčítavame tak, ak majú spoločný menovateľ (to znamená v menovateli rovnaké číslo) potom sčítame iba čitatele a menovateľa opíšeme. To platí aj pri odčítani.

Ak nemáme zlomok z rovnakým menovateľom potom ich musíme upraviť na spoločného menovateľa a až potom sčítať.

Príklady:

$\frac{1}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3}{8}$ Na koľko zlomky majú spoločného menovateľa, ktorým je číslo 8 , sčítame čitatele 1+2 a opíšeme menovateľ.

$\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{1}{6}+\frac{2.2}{6}=\frac{1}{6}+\frac{4}{6}=\frac{5}{6}$

Popis výpočtu: Tieto dva zlomky nemajú spoločného menovateľa musíme určiť spoločného menovateľa v tomto prípade číslo 6, lebo číslo 6 je deliteľné číslom 6 a číslom 3. Prvý zlomok ostane v pôvodnom stave a druhý upravíme na šestiny a to tak, že menovateľa číslo 6 podelíme číslom 3 čo je číslo 2 a týmto číslom vynásobíme číslo dva v čitateli 2.2=4 čo je nový čitateľ zlomku. Teda nový druhý zlomok je $\frac{4}{6}$ a teraz, keď už máme zlomky z rovnakým menovateľom môžeme sčítať čitatele 1+4=5 a opísať menovateľa číslo 6 výsledok je $\frac{5}{6}$.

Ak máme viac zlomkov musíme určiť spoločný menovateľ pre všetky zlomky:

Ak sa nevieme rozhodnúť ktorý je spoločný menovateľ jednoducho vynásobíme menovatele medzi sebou a máme spoločného menovateľa.

Príklad:

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{6}=\frac{1.6+3.8}{6.8}=\frac{6+24}{48}=\frac{30}{48}=podelíme\ čitateľa\ a\ menovateľa\ dvoma=\frac{30:2}{48:2}=$$
$$=\frac{15}{24}$$

Iné riešenie

$\frac{1}{8}+\frac{3}{6}=\frac{1.3+3.4}{24}=\frac{3+12}{24}=\frac{15}{24}$ v tomto prípade sme našli najmenšieho spoločného menovateľa čo je v tomto prípade 24 a ako vidíme výsledok máme v základnom tvare zlomku. (Základný tvar zlomku definícia: Ak čísla v čitateli a menovateli majú najväčšieho spoločného deliteľa jednotku to znamená že sú nesúdeliteľné.

Ak máme viac zlomkov napríklad:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{3}{24}-\frac{2}{3}=\frac{1.4+1.2+3.1-2.8}{24}=\frac{4+2+3-16}{24}=\frac{-7}{24}$$

6.3 Násobenie zlomkov

Násobenie zlomkov je pomerne jednoduché definícia je nasledovná zlomok zlomkom násobíme tak, že čitateľa vynásobíme čitateľom a menovateľa vynásobíme menovateľom.

Príklad: $\frac{3}{8}.\frac{2}{5}=\frac{3.2}{8.5}=\frac{6}{40}\ upravíme\ na\ základný\ tvar\ \frac{6:2}{40:2}=\frac{3}{20}$

Príklad: $-\frac{3}{8}.\frac{2}{5} = -\frac{6}{40} = \frac{3}{20}$

Príklad: $\frac{3}{-8}.\frac{2}{5} = \frac{6}{-40} = \frac{3}{-20} = 3:(-20) = -6{,}6777 = -\frac{3}{20}$ ako narábať s mínusovým znamienkom v menovateli zlomku.

Príklad: $\frac{-3}{8}.\frac{2}{5} = \frac{-6}{40} = \frac{-3}{20} = (-3):20 = -6{,}6777 = -\frac{3}{20}$ ako narábať s mínusovým znamienkom v čitateli zlomku.

Podľa čl. 5.3 Distributívny zákon ako narábať zo znamienkami pri násobení a delení.

6.4 Delenie zlomkov

Definícia delenia zlomkov : Zlomok zlomkom delíme tak, že prvý zlomok opíšeme a vynásobíme prevrátenou hodnotou druhého zlomku. Prevrátená hodnota zlomku znamená , že vymeníme čitateľa za menovateľa.

Príklad: $\frac{20}{5}:\frac{6}{3} = (20:5):(6:3) = 4:2 = 2$

Ten istý príklad, ale podľa definícii delenia zlomkov: $\frac{20}{5}:\frac{6}{3} = \frac{20}{5}.\frac{3}{6} = \frac{60}{30} = 60:30 = 2$

Príklad je možné napísať aj ako takzvaný zložený zlomok:

$\frac{\frac{20}{5}}{\frac{6}{3}} = \frac{20}{5}.\frac{3}{6} = \frac{60}{30} = 60:30 = 2$

6.5 Rozširovanie a krátenie zlomkov

Rozšírenie zlomku znamená vynásobiť čitateľa aj menovateľa tým istým číslom rôznym od nuly.

(Hodnota zlomku sa rozšírením nezmení)

Príklad: $\frac{3}{4} = rozšírime\ ho\ napríklad$ číslom $2 = \frac{3.2}{4.2} = \frac{6}{8}$ => $\frac{3}{4}$ = 0,75 ..... $\frac{6}{8} = 0{,}75$

Vidíme, že rozšírením sa hodnota zlomku nemení

Krátiť zlomok znamená deliť čitateľa aj menovateľa tým istým číslom rôznym do nuly.(Hodnota zlomku sa nemení)

Príklad: $\frac{6}{8} = krátime\ ho$ číslom $2 = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$

6.5 Porovnávanie zlomkov

Zlomky porovnávame krátením:

Príklad : porovnajte $\frac{3}{4}$ a $\frac{24}{32}$ zlomok $\frac{3}{4}$ $je\ v\ základnom\ tvare$ upravme na základný tvar zlomok $\frac{24}{32} = \frac{24:2}{32:2} = \frac{12:4}{16:4} = \frac{3}{4}$ môžeme napísať, že $\frac{3}{4} = \frac{24}{32}$

Použitím krížového pravidla :

Príklad: porovnajte $\frac{3}{4}$ a $\frac{24}{32}$; $\frac{3}{4}$ $\frac{24}{32}$ násobíme v smere šípok 3.32=96; 4.24=96 tým že máme rovnaké výsledky pri násobení zlomky sa rovnajú ak by sme dostali rôzne výsledky zlomky sa nerovnajú.

$Príklad$: $\frac{3}{8}$ a $\frac{8}{32} = \frac{3}{8}$ a $\frac{8:4}{32:4} = \frac{2}{8}$; $\frac{3}{8} > \frac{2}{8}$ z uvedeného výpočtu ak máme spoločného menovateľa porovnáme čitateľe $\frac{3}{8} > \frac{8}{32}$ keď si nevime pomôcť použijeme kalkulačku

A zlomky vydelíme $\frac{3}{8} = 3:8 = 0{,}375$ a $\frac{8}{32} = 8:32 = 0{,}250$ => že 0,375>0,25 to znamená, že $\frac{3}{8} > \frac{8}{32}$.

6.6 Deliteľnosť čísiel

Prirodzené číslo je deliteľné bezozbytku:

2- ak je na konci párne číslo 0,2,4,6,8 ....

3- ak je ciferný súčet čísiel deliteľný tromi

111111111 ciferný súčet čísiel 1+1+1+1+1+1+1+1+1=9/3=3 číslo (11111111) je deliteľné 3 bezo zvyšku.

4- ak je posledné dvojčíslie deliteľné 4,alebo sa číslo končí dvoma nulami (číslo končiace dvoma nulami je vždy deliteľné stovkou a stovka je deliteľná štyrmi 100/4=25 číslo je deliteľné štyrmi.

5- ak sa číslo končí 5 alebo 0

6- ak je číslo deliteľné dvomi a súčasne tromi

2406- číslo je párne je deliteľné dvomi

2406= ciferný šúčet je 2+4+0+6=12:3=4 deliteľné tromi bez zvyšku znamená že je deliteľné tromi => číslo 2406 je deliteľné dvoma a troma je deliteľné aj šiestimi.

8- ak je posledné trojčíslie deliteľné ôsmimi

9- ak je ciferný súčet deliteľný deviatimi

10- ak sa číslo končí nulou

7. Lomené výrazy

Začnime príkladom

$$\frac{4a}{16a} = \frac{4}{16}.\frac{a}{a} = \frac{4:4}{16:4}.\frac{a}{a} = \frac{1}{4}.\frac{a}{a} = \frac{1}{4}$$

$\frac{a}{a}$=1

Môžeme krátiť v zlomkoch len vtedy ak je v čitateli aj menovateli súčin (čiže krát)

Príklad : $\frac{a+3}{6}$ nemôžeme krátiť ,ale môžeme rozložiť na dva zlomky $=\frac{a}{6}+\frac{3}{6}=\frac{a}{6}+\frac{3:3}{6:3}=\frac{a}{6}+\frac{1}{2}$

Príklad: $\frac{2}{a-2}$ nemôžeme krátiť nedá sa rozložiť ani na dva zlomky

Príklad: $\frac{a+2}{a+2}=\frac{(a+2)}{(a+2)}=1$

Príklad: $\frac{12xy}{6xy}=(12xy):(6xy)=2$

8. Mocniny , odmocniny

Mocniny : príklad 5.5.5.5.5=3125

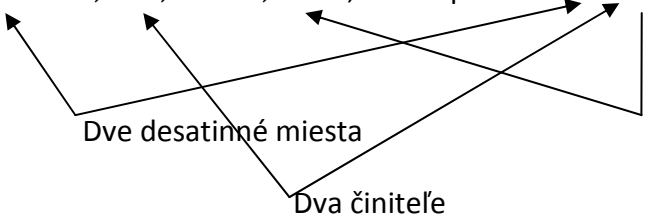
Výhodnejší je zápis $5^5 = 3125$ čítaj päť umocnené na piatu

Odmocnina opačný proces ako umocňovanie

$\sqrt[5]{3125} = 5$ čítaj piata odmocnina z 3125

Príklad umocnime desatinné číslo: $0{,}3^2 = 0{,}3.0{,}3 = 0{,}09$ vynásobíme 3.3=9 a teraz počet desatinných miest každý člen má jedno desatinné miesto sú dva to znamená jedno desatinné miesto krát dva rovná sa dve desatinné miesta to znamená, že 9 bude na mieste stotín.

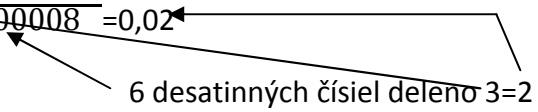
Umocnime desatinné číslo:$0{,}03^2 = 0{,}03.0{,}03 = 0{,}0009$; 3.3=9 počet núl 2x2=4



Z uvedeného vidíme, že pri umocňovaní (násobení) desatinného čísla sa spočítavajú desatinné miesta 0,03.0,03 spolu dve +dve desatinné miesta to znamená spolu 4 desatinné miesta, 3x3=9 a odzadu dáme 4 desatinné miesta výsledok 0,0009

Deviatka je na
štvrtom desatinnom mieste

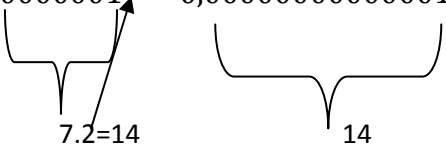
Príklad: odmocnime desatinné číslo napríklad $\sqrt[3]{0{,}000008}$ =0,02



Príklad: $\sqrt[3]{0{,}000027}$ =0,03

Ak je počet čísiel za desatinnou čiarkou deliteľný číslom odmocniny bezo zvyšku teraz je to 6 desatín za desatinnou čiarkou delené trojkou => 6:3=2 výsledok bude ako $\sqrt[3]{27}$=3 ku ktorému pridáme dve desatinné miesta odzadu, teda trojka bude na druhom desatinnom mieste výsledok je 0,03.

Príklad: $0{,}0000001^2 = 0{,}00000000000001$



8.1 Umocňovanie čísiel

$Príklad$: $3^2 = 3.3 = 9$ kladné čísla

$Príklad$: $(-3)^2 = (-3).(-3) = 9$ záporné čísla na druhú

Zistili sme zaujímavú skutočnosť: $(-3)^2 = 3^2$ = 9 ale je na mieste otázka čo je potom $\sqrt[2]{9}$=? Bez zdôvodnenia napíšeme $\sqrt[2]{9} = |3|$

Číslo tri je v absolútnej hodnote : znak |číslo| je absolútna hodnota.

Z uvedeného je zrejmé, že druhá odmocnina zo záporného čísla nemôže byť reálne číslo je to takzvané imaginárne číslo.

$Príklad: (-3)^3 = (-3).(-3).(-3) = 9.(-3) = -27$ záporné čísla na tretiu

8.2 Umocňovanie čísiel

Sčítavať a odčítavať môžeme iba mocniny s rovnakým základom a rovnakým exponemtom

Príklad: $a^2 + a^2 = 2.a^2$

Pre súčin mocnín s rovnakým základom platí : $a^m . a^n = a^{(m+n)}$ a ∈ R (a patrí do množiny reálnych čísiel)

m,n ∈ Z (m a n patí do množiny celých čísiel)

Príklad : $a^2.a^4$ =a.a. a.a.a.a=$a^{2+4} = a^6$

2 + 4 = 6

Pre podiel mocnín s rovnakým základom platí: $\frac{a^m}{a^n} = a^m : a^n = a^{(m-n)}$

Príklad: $a^8 : a^2 = \frac{a.a.a.a.a.a.a.a}{a.a} = a^{8-2} = a^6$

Príklad: $a^2 : a^5 = \frac{a.a}{a.a.a.a.a} = \frac{1}{a.a.a} = \frac{1}{a^3} = a^{2-5} = a^{-3}$

Príklad: $a^5 : a^5 = \frac{a.a.a.a.a}{a.a.a.a.a} = a^{5-5} = a^0 = 1$ $a \neq 0$

Príklad: $\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$

Ďalšie vzorce : $(a.b)^n = a^n . b^n$

$(\frac{a}{b})^n = (a:b)^n = a^n : b^n$ b≠ 0

$Príklad : (\frac{3.a}{b})^3 = \frac{(3.a)^3}{b^3} = \frac{27.a^3}{b^3} = 27.a^3.b^{-3}$ b≠ 0

$(a^m)^n = a^{m.n}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^n}$ a≥ 0

Príklad: $\sqrt[2]{x} = \sqrt[2]{x^1} = x^{\frac{1}{2}}$ x≥ 0

Príklad: $\sqrt[3]{x^3} = x^{\frac{3}{3}} = x^1 = x$

Príklad: $\sqrt[2]{x}.\sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1+1}{2}} = x^{\frac{2}{2}} = x^1 = x$

Pozor: $\sqrt{a \mp b} \neq \sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ neplatí

Príklad: $\sqrt[2]{9+16} = \sqrt[2]{25} = 5$

$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$ a,b≥ 0

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}$ a,b≥ 0

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$ a ≥ 0

Príklad: $\sqrt[4]{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[4]{b^{\frac{1}{3}}} = b^{\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{1}}} = b^{\frac{1.1}{3.4}} = b^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{b}$

Dôležité: $a^0 = 1$ a ≠ 0

9 Výrazy (zdroj internet)

Výrazy a ich úpravy

Počtový výraz je matematický zápis, ktorým vyjadrujeme počtové operácie s číslami a poradie v akom majú byť prevedené. Napr.: $(2\cdot(5-1,76)+5):0,4$.

Algebraický výraz je počtový výraz, ktorý obsahuje číselné premenné a vyjadruje k nim základné počtové operácie alebo k nim inverzné počtové operácie, umocňovanie resp. odmocňovanie.

- **Racionálny** algebraický výraz neobsahuje odmocniny, napr. $\frac{x+5}{3}-\frac{3}{4}x$
- **Iracionálny** algebraický výraz obsahuje odmocniny, napr. $\sqrt{2x-7}+3x$

Definičný obor premenných algebraického výrazu je množina všetkých takých hodnôt premenných, pre ktoré má algebraický výraz zmysel. Zvyčajne ho označujeme D_f

---

Výpočet hodnoty algebraického výrazu pre dané hodnoty premenných vykonáme dosadením daných hodnôt premenných za jednotlivé premenné a určením hodnoty takto vzniknutého číselného výrazu.

Príklad 2:

Vypočítaj hodnotu daných algebraických výrazov pre dané hodnoty premenných:

a) $V(x)=\frac{2x-3}{2-x}-\frac{3}{4}$ pre $x=3;\ \frac{1}{2}$

b) $V(a)=3\cdot(2x-8)$ pre $a=7;2,5$

Riešenie:

a) $V(3)=\frac{2\cdot 3-3}{2-3}-\frac{3}{4}=\ldots=-\frac{15}{4}=-3\frac{3}{4}$

$V(\frac{1}{2})=\frac{2\cdot\frac{1}{2}-3}{2-\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}=\ldots=-\frac{17}{12}=-1\frac{5}{12}$

b) $V(7)=3\cdot(2\cdot 7-8)=\ldots=18;$

$V(2,5)=3\cdot(2\cdot 2,5-8)=\ldots=-9;$

Úpravou algebraického výrazu rozumieme nahradenie daného výrazu iným výrazom, ktorý sa mu rovná vspoločnom definičnom obore premenných. Tento definičný obor určíme z podmienok, za ktorých má daný výraz i jeho riešenie zmysel.

Pri úpravách sa často vyžaduje úprava výrazu na súčin, zjednodušenie výrazu, odstránenie odmocniny z menovateľa, ...

Pri úpravách racionálnych lomených výrazov používame vzťahy pre počítanie so zlomkami a vzťahy na rozklad mnohočlenov.

Vzorce pre druhé a tretie mocniny dvojčlenov a+b, a-b ($a,b \in \mathbf{R}$ resp. $\mathbf{C}$):

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; napr.: $(2+3x)^2=4+12x+9x^2$;

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$; napr.: $(y-7)^2=y^2-14y+49$;

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; napr.: $(2+5x)^3=8+60x+150x^2+125x^3$;

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$; napr.: $(1-2y)^3=1-6y+12y^2-8y^3$;

Ďalšie vzorce ($a,b \in \mathbf{R}$ resp. $\mathbf{C}$):

$a^2-b^2=(a-b).(a+b)$; napr.: $4-9x^2=(2-3x).(2+3x)$;

$a^3+b^3=(a+b).(a^2-ab+b^2)$; napr.: $27+125x^3=(3+5x).(9-15x+25x^2)$;

$a^3-b^3=(a-b).(a^2+ab+b^2)$; napr.: $8p^3-27q^3=(2p-3q).(4p^2+6pq-9q^2)$;

Príklad 4:

Vypočítajte: $\frac{3}{x+1}+\frac{x}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}=$

Riešenie:

$$\frac{3}{x+1}+\frac{x}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}=\frac{3}{x+1}+\frac{x}{(x-1)(x+1)}-\frac{2}{x-1}=\frac{3(x-1)+x-2(x+1)}{(x+1)(x-1)}=$$

- najskôr určíme podmienky, za ktorých majú dané výrazy zmysel (v menovateli nesmie byť 0, základ druhej odmocniny musí byť ≥ 0);
- potom rozložíme menovatele na súčin lineárnych jedno- alebo dvojčlenov pomocou vynímania pred zátvorku alebo pomocou vyššie uvedených vzťahov;
- potom určíme spoločný menovateľ tak, že najskôr odpíšeme prvý menovateľ apostupne z každého menovateľa pridávame tie činitele, ktoré sa v spoločnom menovateli ešte nenachádzajú, čiže odpíšeme (x-1) a potom pridáme (x+1);
- následne spoločný menovateľ $(x+1)(x-1)$ delíme menovateľom $(x+1)$ a násobíme príslušným čitateľom 3, teda píšeme $3\cdot(x-1)$; podobne spoločný menovateľ $(x+1)(x-1)$ delíme menovateľom $(x-1)(x+1)$ a násobíme príslušným čitateľom x, teda píšeme $1\cdot x$ čiže x; a nakoniec spoločný menovateľ $(x+1)(x-1)$ delíme menovateľom $(x-1)$ a násobíme príslušným čitateľom 2, teda píšeme $2\cdot(x+1)$;
- zjednodušíme čitateľ a ak sa dá, pokúsim sa upraviť ho na súčin a vykrátiť s menovateľom;

$$=\frac{3x-3+x-2x+2}{(x+1)(x-1)}=\frac{(x-1)\cdot 1}{(x+1)(x-1)}=$$

Násobenie algebraických zlomkov:

Pri násobení zlomkov násobíme čitateľa čitateľom a menovateľa menovateľom a ak chceme daný výraz zjednodušiť, tak menovateľ i čitateľ rozložíme na súčin a vykrátime.

Príklad 5:

Vypočítajte: $\frac{x}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{3x}=$

Riešenie:

$$\frac{x}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{3x}=\frac{x\cdot(x+2)}{(x-2)(x+2)\cdot 3x}=\frac{1}{3\cdot(x-2)};$$; podmienky riešiteľnosti: $x\neq\pm 2 \wedge x\neq 0$

Delenie algebraických zlomkov:
pri delení dvoch zlomkov násobíme prvý zlomok prevráteným druhým zlomkom;

Príklad 6:

Vypočítajte: $\frac{x}{x^2-6x+9}:\frac{5x}{3-x}=$

Riešenie:

$$\frac{x}{x^2-6x+9}:\frac{5x}{3-x}=\frac{x}{x^2-6x+9}\cdot\frac{3-x}{5x}=\frac{x\cdot(x-3)}{(x-3)^2\cdot 5x}=\frac{1}{5\cdot(x-3)};$$; podmienky riešiteľnosti: $x\neq 3 \wedge x\neq 0$

Úprava zloženého algebraického zlomku:

Postupujeme buď tak, že zložený zlomok nahradíme delením dvoch zlomkov alebo podľa nasledovnej schémy (vonkajšie krát vonkajšie lomeno vnútorné krát vnútorné):

Príklad 7:

Vypočítajte: $\dfrac{\frac{2-x}{x+3}}{\frac{4-4x}{x^2+3x}}=$

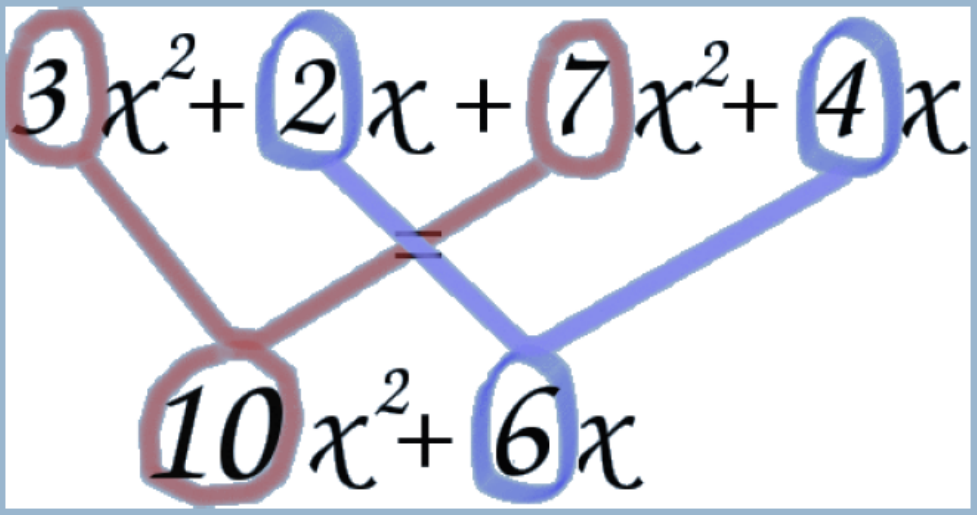
Riešenie:

$$\left[\frac{\frac{2-x}{x+3}}{\frac{4-4x}{x^2+3x}}\right]=\frac{(2-x)(x^2+3x)}{(x+3)(4x-4)}=\frac{(2-x)\cdot x\cdot(x+3)}{(x+3)(4x-4)}=\frac{2x-x^2}{4x-4};$$

podmienky riešiteľnosti: $x\neq -3 \wedge x\neq 0 \wedge x\neq 1$

Sčitovanie výrazov

Výraz sčitujeme tak, že sčítame čísla pri rovnakých premenných s rovnakými exponentmi.



Príklad:

Vypočítaj:

$7x^2 - 5x + 29x^2 - 15x =$

Riešenie:

$7x^2 - 5x + 29x^2 - 15x = 7x^2 + 29x^2 - 15x - 5x = \underline{36x^2 - 20x}$

Príklad:

Vypočítaj:

$28a^2 + 14z - 6z^2 - 39a^2 + 9z =$

Riešenie:

$28a^2 + 14z - 6z^2 - 39a^2 + 9z = 28a^2 - 39a^2 + 14z + 9z - 6z^2 = \underline{-11a^2 + 23z - 6z^2}$

Mínus pred zátvrkou

Ak je pred zátvrokou znamienko mínus, všetky znamienka vo vnútri zátvorky sa menia na opačné!

Napríklad :

$-(2a - 7h - 54o + 37j) = -2a + 7h + 54o - 37j$

Odčitovanie výrazov

Napríklad:

Odčítajme výraz $35x^2 + 4x$ od výrazu $79x^2 - 12x$:

$$79x^2 - 12x - (35x^2 + 4x) = 79x^2 - 12x - 35x^2 - 4x =$$

$$= 79x^2 - 35x^2 - 12x - 4x = \underline{44x^2 - 16x}$$

Príklad:
Vypočítajte:

$$(5a - 6b + c) - (3a + b - c)$$

Riešenie:

$$(5a - 6b + c) - (3a + b - c) = (5a - 6b + c) + (-3a - b + c) = 5a - 6b + c - 3a - b + c = 5a - 3a - 6b - b + c + c = \underline{2a - 7b + 2c}$$

Príklad:
Od súčtu výrazov (3x-2y+1), (2x-3y-1) odčítajte ich rozdiel
Riešenie:

Súčet . . . . . (3x-2y+1) + (2x-3y-1) = 3x + 2x - 2y -3y + 1 - 1 = $\underline{5x - 5y}$

Rozdiel . . . . . (3x-2y+1) - (2x-3y-1) = (3x-2y+1) - (2x-3y-1) = 3x - 2y + 1 - 2x + 3y + 1 = $\underline{x + y + 2}$

Súčet - Rozdiel . . . . . (5x - 5y) - (x + y + 2) = 5x - 5y - x - y - 2 = $\underline{4x - 6y - 2}$

Násobenie výrazov

Jednočlenom: $7x \cdot (2x^2 - 5)$

Výraz násobíme jednočlenom tak, že týmto jednočlenom vynásobíme každého člena výrazu, a teda

$$7x \cdot (2x - 5) =$$

$7x \cdot (2x - 5) = 7x \cdot 2x - 7x \cdot 5 = \underline{14x^2 - 35x}$

Príklad:
Vynásobte:

$(4x - 7y) \cdot 5y$

Riešenie:

$(4x - 7y) \cdot 5y = 4x \cdot 5y - 7y \cdot 5y = 4 \cdot 5xy - 7 \cdot 5y^{1+1} = \underline{20xy - 35y^2}$

Príklad:
Vynásobte:

$(3x^3 - x + 2) \cdot (x^2 + 2x + 1)$

Riešenie:

$(3x^3 - x + 2) \cdot (x^2 + 2x + 1) = x^2 \cdot 3x^3 + 2x \cdot 3x^3 + 1 \cdot 3x^3 + x^2 \cdot (-x) + 2x \cdot (-x) + 1 \cdot (-x) + x^2 \cdot 2 + 2x \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 3x^5 + 6x^4 + 3x^3 - x^3 - 2x^2 - x + 2x^2 + 4x + 2 = \underline{3x^5 + 6x^4 + 2x^3 + 3x + 2}$

Násobíme každý člen s každým a potom sčítame to čo je rovnaké, pozri príklad hore.

Najväčší spoločný deliteľ

Najväčší spoločný deliteľ čísel a, b je naväčšie z tých čísel ktoré delia obe čísla. Označujeme ho D(a,b)

Napríklad: Zapíšem: D (6, 9) =

3

Úprava výrazu na súčin

Vynímanie čísla pred zátvorku

Najväčšieho spoločného deliteľa všetkých členov výrazu vyjmeme (dáme) pred zátvorku, v zátvorke zostanú členy vydelené týmto deliteľom.

$12x + 24xy - 6z = \cdot($ $)$

Vynímanie výrazu pred zátvorku

Pred zátvorku môžme vyňať aj výraz, ale to len vtedy, keď sa v každom člene výrazu nachádzajú jeho násobky:

$14xy + 28y + 49y^2 = \cdot($ $)$

Použitie vzorcov

Ak sa pri rozklade výrazu na súčin nedá nič vyňať, pokúsime sa o rozklad pomocou vzorcov:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Príklad:
Rozložte na súčin:

$$9x^2y + 6xyz - 27x^2y^2z^2$$

Riešenie:

$9x^2y + 6xyz - 27x^2y^2z^2 = 3xy \cdot 3x + 3xy \cdot 2z + 3xy \cdot 9xyz^2 = \underline{3xy \cdot (3x + 2z - 9xyz^2)}$

Príklad:
Upravte na súčin pomocou vzorcov:

$$x^2 - 10x + 25$$

Riešenie:

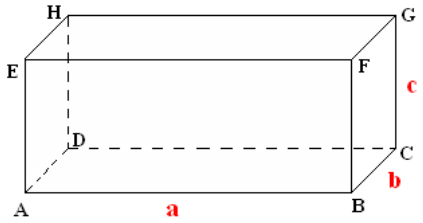
Ktorý vzorec použijem ?

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

a teda: $x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = (x - 5)^2$

9 Objem a povrch telies (zdroj internet)

Kváder má:



- ~ 8 vrcholov – označujeme ich veľkými tlačenými písmenami
- ~ 12 hrán – hrany môžu mať tri veľkosti - a, b, c
- ~ 6 stien – steny sú tvorené obdĺžnikmi s rozmermi a, b, c

Veľkosti troch hrán vychádzajúcich z toho istého vrcholu sa nazývajú rozmery kvádra, označujeme ich a, b, c.

Objem V kvádra s rozmermi a, b, c vypočítame

$$V = a.b.c$$

Povrch S kvádra vypočítame, ak sčítame obsahy všetkých stien

$$S = 2.(a.b + b.c + a.c)$$

Kocka má:

- ~ 8 vrcholov – označujeme ich veľkými tlačenými písmenami
- ~ 12 hrán – všetky hrany majú rovnakú veľkosť a
- ~ 6 stien – všetky steny majú tvar štvorca s hranou dĺžky a

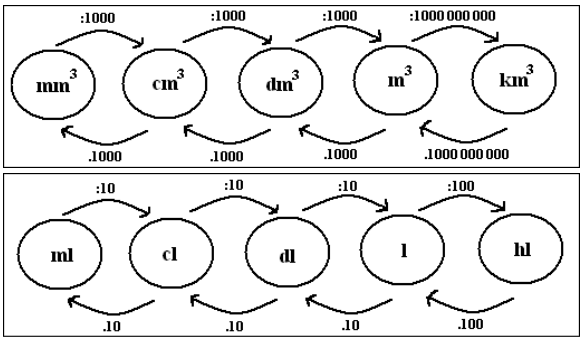
Kocka má všetky rozmery rovnaké, označujeme a.

Objem V kocky s hranou dĺžky a vypočítame

$V = a.a.a = a^3$

Povrch S kocky vypočítame, ak sčítame obsahy všetkých jej stien

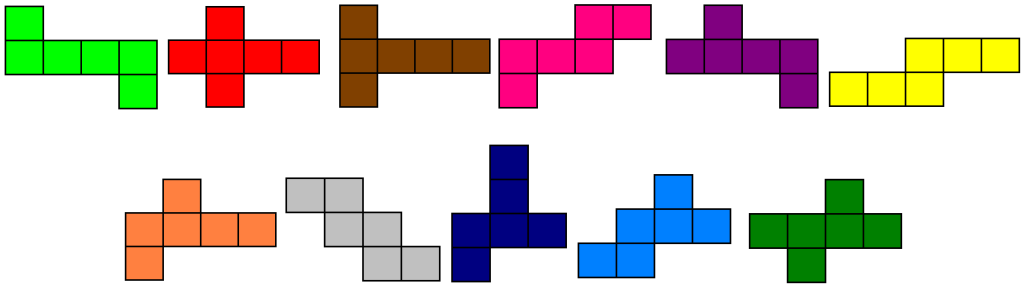
$$S = 6.a.a = 6a^2$$



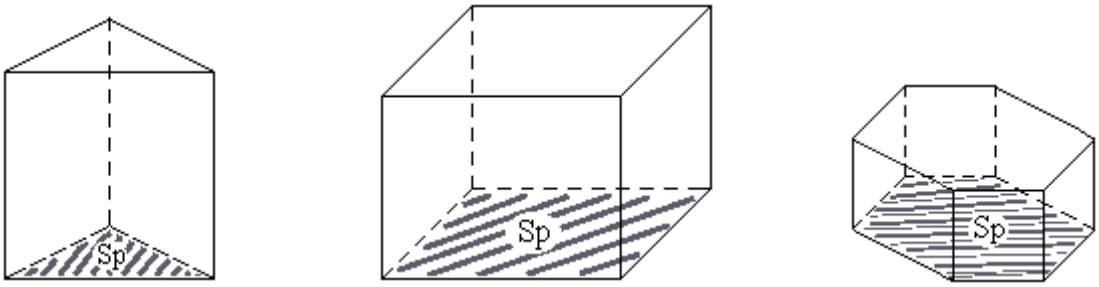
1 liter = 1 dm3

1 ml = 1 cm3

Siete kocky



Hranol



trojboký hranol štvorboký hranol šesťboký hranol

Pri výpočte objemu a povrchu hranola je podstatné, aký tvar má jeho podstava. Vzorce pre rôzne podstavy hranolov nájdete v dokumentoch Trojuholník alebo Štvoruholníky.

Objem hranola

$$V = Sp.v$$

Povrch hranola

$$S = 2.Sp + Spl$$

$$Spl = op.v$$

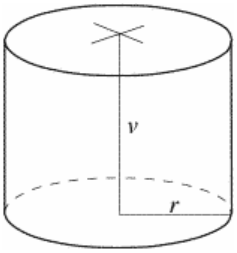
Sp – obsah podstavy

v – výška hranola

Spl – obsah plášťa

op – obvod podstavy

Valec



Objem valca

$$V = \pi r^2 v$$

Povrch valca

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rv$$

10 Rovnice (zdroj internet)

Lineárnou rovnicou s neznámou x nazývame každú rovnicu tvaru ax + b = 0, kde a, b sú reálne čísla a a ≠ 0.

Pri riešení môžu nastať 3 prípady:

ak a≠0, potom ax = -b a rovnica má práve jeden koreň x = -b/a;

ak a = b = 0, po úprave dostaneme 0 = 0 a to je pravdivý výrok (rovnosť), takže pôvodná rovnica má nekonečne veľa riešení resp. koreňom tejto rovnice je každé reálne číslo;

ak a = 0, b ≠ 0, po úprave dostaneme 0 = -b, a keďže b ≠ 0, tak sme dostali nepravdivú rovnosť - pôvodná rovnica nemá žiadne riešenie.

príklad

$$2\cdot(5x-1)-11\cdot\left(x-\frac{7}{33}\right)=13\cdot\left(\frac{1}{3}+x\right)-12x$$

riešenie

$$\begin{aligned}
2\cdot(5x-1)-11\cdot\left(x-\frac{7}{33}\right) &= 13\cdot\left(\frac{1}{3}+x\right)-12x \\
10x-2-11x+\frac{7}{3} &= \frac{13}{3}+13x-12x \\
-x+\frac{1}{3} &= \frac{13}{3}+x \qquad /\cdot 3 \\
-3x+1 &= 13+3x \qquad /-3x \\
-6x+1 &= 13 \qquad /-1 \\
-6x &= 12 \qquad /:(-6) \\
x &= -2
\end{aligned}$$

eda množina riešení danej rovnice je P = {-2}.

Môžeme si po krokoch povedať, ako sme postupovali:

najskôr odstránime zátvorky - v našom prípade vynásobením;

nezabudnite, že násobíme každý člen výrazu v zátvorke;

napr. 2 · (3x - 7) - 5 = 6x - 14 - 5, teda násobím len výraz v zátvorke;

je to akoby sme prečítali „dva krát zátvorka mínus päť“

ale 2 · (3x - 7 - 5) = 6x - 14 - 10 = 6x - 24, násobíme aj číslo -5, lebo sa nachádza v zátvorke

odstránime zlomky (alebo zjednodušíme ľavú a pravú stranu rovnice a zlomky odstránime neskôr - ako v predchádzajúcom príklade);

zlomky odstránime tak, že ľavú aj pravú stranu rovnice násobíme najmenším spoločným násobkom všetkých menovateľov (pozrite: hľadanie najmenšieho spoločného násobku dvoch čísel)

zjednodušíme obe strany rovnice a následne presunieme jednočleny s neznámou na jednu stranu rovnice (vyberiem si ľavú alebo pravú) a čísla na druhú stranu

opäť zjednodušíme a následne celú rovnicu delíme koeficientom pred neznámou, v našom prípade to bolo číslo -6;

skúšku správnosti prevedieme dosadením výsledku do zadania

ak sa Ľ = P, tak zapíšeme riešenie v tvare napr. K={-2} resp. P={-2}.

11 Nerovnice (zdroj internet) je to v češtine

Nerovnice

Lineární nerovnice s neznámou $x \in R$ je každá nerovnice ve tvaru $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$ nebo $ax + b \geq 0$, kde a, b jsou reálné koeficienty.

Při řešení nerovnic využíváme **ekvivalentní úpravy.**

1. výměna stran nerovnice
2. přičtení čísla nebo výrazu k oběma stranám nerovnice
3. vynásobení obou stran nerovnic stejným kladným číslem nebo výrazem,
4. vynásobení obou stran nerovnice záporným číslem se záměnou znaku nerovnosti
5. umocnění obou stran nerovnice přirozeným mocnitelem, jen když jsou obě strany rovnice kladné
6. odmocnění obou stran nerovnice přirozeným odmocnitelem, jen když jsou obě strany kladné

Lineární nerovnice

Lineární nerovnice jsou takové nerovnice, v nichž se vyskytuje proměnná x nejvýše se stupněm mocniny jedna, tzn. jde o nerovnice, které lze převést na jeden ze základních tvarů: $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$ nebo $ax + b \geq 0$, kde a,b jsou libovolná reálná čísla, $x \in R$ je neznámá.

1. **Řešte v N nerovnici:**

$$\frac{2+27x}{6} < \frac{5}{2} + \frac{12x+1}{3} \qquad /*6$$

$$2 + 27x < 15 + 24x + 2$$
$$3x < 15 \qquad /:3$$
$$x < 5$$

$K \in \{1; 2; 3; 4\}$

2. Řešte v R nerovnici:

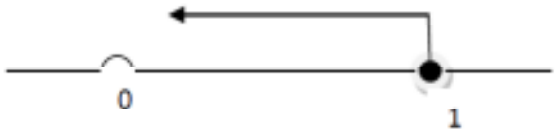
$$\frac{3}{2}(x+3) \geq 2(x+2) \qquad /*2$$

$$3(x+3) \geq 4(x+2)$$

$$3x+9 \geq 4x+8$$

$$-x \geq -1 \qquad /*(-1)$$

$$x \leq 1$$



$x \in (-\infty, 1\rangle$

12 Percentá (zdroj internet)

Potreba zavedenia percent - motivácia

- *Východiskové poznatky* – žiaci vedia porovnávať zlomky s rôznymi menovateľmi prevedením na spoločného menovateľa, poznajú vzťah medzi zlomkom a desatinným č., vedia previesť zlomok na desatinné č. a naopak.
- *Porovnávanie pomerov (zlomkov)*

  Pr 1. Porovnaj, ktorý zo spolužiakov je úspešnejší v pestovaní priesad. A) Soňa zasiala 10 semienok, vzišlo jej 6, Jakub zasial 30, vzišlo mu 16. B) Gita mala priesady v 15 teglikoch, vzišlo jej 8, Zdeno obsial 6 teglikov, vzišli mu 3 priesady. Zostav poradie úspešnosti všetkých pestovateľov.

  C) Filipovi vzišlo 14 priesad z 20, Svetlane 30 zo 40, Petrovi 27 z 37. Zaraď ich do poradia.

  - Podobné poradie vytvorili aj v 7.B,7.C,7.D triede. Predsedova tried mali vytvoriť spoločné poradie úspešnosti všetkých siedmakov.
- **=> ak niekto porovnal zlomky pri spoločnom menovateli 30 a iný zase iné zlomky pri spoločnom menovateli 50, nevieme ich rýchlo navzájom porovnať. Prirodzeným východiskom je zavedenie univerzálneho menovateľa. Z historických dôvodov je to menovateľ 100 a menovateľ 100 zapíšeme znakom %** (čítame percento). **Percento je len iný zápis zlomku s menovateľom 100 (38% = 38/100).**

Počet percent. „Koľko percent je ...?“

- Pr 2. Peter dostal 5/8 z odmeny. Koľko je to percent z celej odmeny?

Riešenie I. Zlomok rozšírim tak, aby menovateľ bol sto.

100 : 8 = 12,5 t.j rozširujem číslom 12,5

=> 5/8 *12,5/12,5 = 62,5/100. Peter dostal 62,5% odmeny.

II. Zlomok je naznačené delenie:

5 : 8 = 0,625. To je 625 tisícin, 62,5 stotín alebo 6,25 desatín. Keďže percentá sú vlastne stotiny, výsledok je 62,5% (desatinnú čiarku vo výsledku posuniem o 2 miesta doprava).

- Pr 3. Do triedy chodí 32 žiakov. Piati z nich chýbajú. Koľko je to percent?

(Tento typ úloh, robí žiakom problémy. Uvádzam ho už na začiatku, aby sa zvýraznila jeho jednoduchosť. Ak chýbajú piati z 32 žiakov, tak chýba 5/32 triedy. A to už žiaci vedia previesť na percentá).

Čo dostaneš, keď sčítaš percentá chýbajúcich a percentá prítomných žiakov? Koľko percent tvoria všetci žiaci triedy?

- Pr 4.V tele človek s hmotnosťou 60 kg je asi 39 kg vody. Koľko percent ľudského tela tvorí voda?

III. 100%.....60kg; 1%.....0,6kg; 39 : 0,6 = 65%; Voda tvorí 65%.

Jedno percento

- **Počítanie cez jedno percento môže byť pre niektorých žiakov najzrozumiteľnejšie. Na druhej strane však pri niektorých typoch úloh môže byť počítanie cez 1 percento (aj keď je univerzálne) nepraktické a pre niektorých žiakov aj nezrozumiteľné.**

  Jedno percento zvýrazňujeme ako operátor – jednu stotinu základu (celku). 1% = 1/100 = 0,01.

- Pr 5. Vypočítaj **1%** z týchto čísel:

  a) 230; b)23; c)0,23; d)2300; e)7,8; f)0,34.

- Pr 6. Koľkokrát viac ako 1% je z toho istého množstva

  a) 10%; b)2,5% c)15% d)120% e)88%.

  Pre viacerých žiakov už úplne známa vec, ide o ujasnenie si úmernosti 30% je 30-krát viac ako 1%. V ďalšom sa táto vlastnosť využíva pri počítaní úloh.

Časť vyjadrená percentami

- **Časť zo základu (celku) vyjadrená percentami**
- **2 spôsoby výpočtu:**

  I. Vypočítame 1 percento (základ vydelíme 100) a výsledok vynásobíme daným počtom percent.

  II. Základ vynásobíme zlomkom vyjadrujúcim počet percent a prevodom na desatinné číslo, napr. 32% z 247 je 32/100*247 = 0,32*247.
- Pr 7. Železnica z Jarnej Vsi do Havranova sa má stavať podľa plánu jeden rok. Každý mesiac musia položiť 16 km trate. Vo februári však bolo nepriaznivé počasie a plán splnili len na 40%. Koľko km trate položili vo februári?

  Riešenie (I.sp): plán.....16 km; 1% zo 16 km .....16 : 100 = 0,16 km;

  40% zo 16 km.....40*0,16 = 6,4 km. Vo februári položili 6,4 km železnice.
- Pr 8. Stavbári chceli znížiť februárový skĺz, preto v máji splnili plán na 120%. Koľko km trate položili v máji?

  - časť vyjadrená percentami môže byť väčšia ako základ, z ktorého počítame percentá.
- Pr 9. Bez výpočtu porovnaj: 27% z 54, 27% z 34, 27% z 511.

  - percento je relatívny údaj, pri danom percente, väčšia časť je z väčšieho celku.

Základ (celok, 100%)

- Pr 10. Kováčovci zaplatia za bývanie mesačne 3000 Sk, čo je 20% ich mesačného príjmu. Aký je ich mesačný príjem?

  Riešenie: Ak viem, koľko je jedno percento, viem rýchlo zistiť, koľko je 100% -základ. 1% je 20-krát menej ako 20%. 20%.....3000 Sk; 1%.....3000:20=150; 100%.....150*100 = 15000. Mesačný príjem Kováčovcov je 15 000 Sk.
- Pr 11. Vo vagóne cestuje 14 rodín. Dve rodiny sú bez detí, 3 rodiny majú len chlapca, 4 rodiny len dievča, jedna rodina je s chlapcom a dievčaťom, 2 rodiny sú z dvoma chlapcami a ostatné s dvoma dievčatami.

  a) Koľko percent rodín cestuje aspoň s jedným chlapcom?

  b) Koľko percent detí vo vagóne sú dievčatá?

  c) Koľko percent dievčat sú jedináčikovia?

  - treba si uvedomiť, čo je základ.

Trojčlenka v percentovom počte

- **Základ – pecentová časť – počet percent**

  Dva z týchto údajov sú vždy dané, tretí máme vypočítať. Základ je vždy 100%. Percentová časť a počet percent sú pri pevnom základe priamo úmerné veličiny. Pri počítaní s percentami môžeme využiť trojčlenku.

Zvyšujeme a znižujeme

- **Vychádzame z obchodných úloh na zvyšovanie a znižovanie cien. Pri týchto úlohách opäť kladieme dôraz na správne pochopenie základu. Pri postupných zmenách cien daného tovaru sa postupne mení aj základ. Na to sa často zabúda. Je to tiež princip úrokovania vkladov, úroky nerastú lineárne z pôvodného vkladu.**
- Pr 13. CD nosiče stáli 540 Sk. Teraz zlacneli o 80%. Koľko korún stoja teraz?

  I. Najprv vypočítame percentovú časť a odčítame ju od pôvodnej ceny.

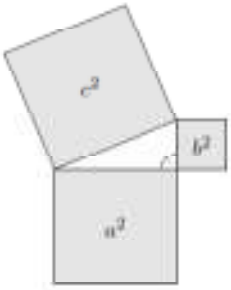
  II. Cenu môžem počítať priamo. Zlacnenie o 80% znamená, že nová cena je 20% z pôvodnej ceny.
- Pr 14. Kilogram melónov stál 30 Sk. Najprv zdraželi o 20%, potom o týždeň zlacneli o 20%. Koľko stál kilogram melónov po zdražení a koľko po zlacnení? Čo myslíš, celkove melóny zlacneli či zdraželi? Alebo ostala cena nezmenená?

  - najskôr žiakov vedieme, aby jednotlivé ceny počítali postupne, neskôr s niektorými môžeme urobiť priamejší výpočet:

  Tovar s pôvodnou hodnotou c najskôr zlacnie o 30%, potom zdraží o 20%. ⇒ po zlacnení stojí 70%, teda 0,7c. Po zdražení 120% z 0,7c, teda 1,2*0,7c= 0,84c. Výsledná cena je teda 84% z pôvodnej ceny, čo je 16%-né zlacnenie z pôvodnej ceny.

13 Pytagoorova veta (zdroj internet)

Pytagorova veta

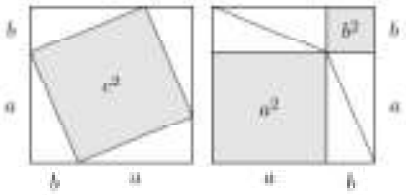


Pytagorovu vetu

$$a^2 + b^2 = c^2$$

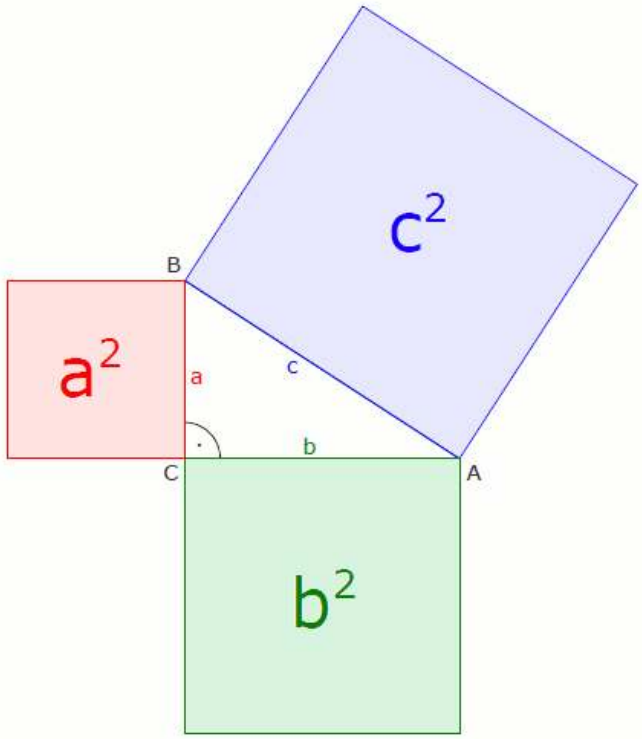
sa učia „recitovať" deti na celom svete. Čo hovorí táto veta? Tvrdí, že ak v *pravouhlom* trojuholníku nakreslíme nad každou stranou štvorec tak, ako je to na obrázku vpravo, Pytagorova veta tak dva menšie štvorce budú mať dokopy rovnaký obsah, ako veľký štvorec.

Ak označíme strany pravouhlého trojuholníka tradične písmenami a, b, c, pričom c je prepona – najdlhšia strana, tá oproti pravému uhlu – tak vetu môžeme naozaj[1] veľmi stručne formulovať ako $a^2 + b^2 = c^2$ (pozri obrázok vpravo).



■ **Dôkaz.** Zoberme štyri kópie nášho trojuholníka a naskladajme ich dvoma spôsobmi tak, ako na obrázku vpravo. V oboch prípadoch sa ľahko ukáže, že výsledkom je štvorec so stranou dĺžky $a+b$. Obsah týchto štvorcov je zjavne rovnaký a ak si odmyslíme štyri trojuholníky, dostávame, že veľký štvorec má rovnaký obsah ako dva menšie dokopy. □

Už starí Egypťania, Indovia a Babylončania stavali pozoruhodné stavby, pri ktorých potrebovali vytyčovať aj pravé uhly. Zistilo sa, že každý pravouhlý trojuholník má jednu pozoruhodnú vlastnosť, ktorú si teraz ukážeme.



Majme pravouhlý trojuholník **ABC**:
c - prepona
a, **b** - odvesny

Ak zostrojíme nad každou stranou tohto trojuholníka štvorec, zistíme že platí:

Pytagorova veta: Obsah štvorca nad preponou pravouhlého trojuholníka sa rovná súčtu obsahov štvorcov nad oboma jeho odvesnami, teda

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Z tejto rovnosti vieme vypočítať dĺžku prepony:

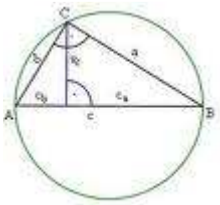
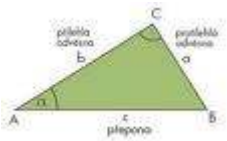
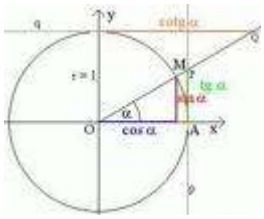
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Taktiež vieme vypočítať dĺžky jeho odvesien:

$$a^2 = c^2 - b^2 \text{ , teda } a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \text{ , teda } b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Obrátená Pytagorova veta: Ak pre dĺžky strán **a**, **b**, **c** ľubovoľného trojuholníka platí vzťah $c^2 = a^2 + b^2$, tak potom je tento trojuholník pravouhlý trojuholník s preponou **c** a odvesnami **a**, **b**.

Pomocou obrátenej Pytagorovej vety vieme zistiť bez rysovania a merania uhlov, či je alebo nie je ľubovoľný trojuholník pravouhlý.

14 Goniometricke funkcie (zdroj internet)

GONIOMETRICKÉ FUNKCIE SIN a COS

Jednotková kružnica – kružnica, ktorej polomer je 1 jednotka
- jej dĺžka je 2π

1 rad = uhol, ktorý na jednotkovej kružnici s vrcholom v strede kružnice vytína oblúk dĺžky 1

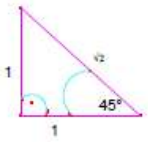
1 rad = 57°17´ jednotka oblúkovej miery

1° = uhol, ktorý ma vrchol v strede kružnice a jeho ramená vytínajú oblúk z obvodu kružnice $\frac{1}{360°}$

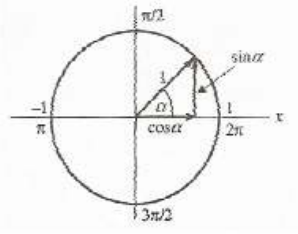
1° = 0,017 rad

Funkcie sínus a kosínus sa pôvodne definovali pomocou pravouhlého trojuholníka s uhlom x ($x \neq 90°$) takto:

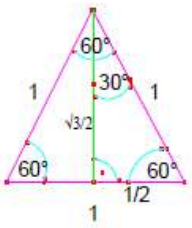
- sin x je pomer protiľahlej odvesny tohto uhla a prepony,
- cos x je pomer priľahlej odvesny k tomuto uhlu a prepony.
- Ďalej tg x je pomer sin x a cos x;
- cotg x je prevrátená hodnota tan x.



Tieto definície, samozrejme, definujú goniometrické funkcie len pre uhly z intervalu (0°, 90°).
Dnes definujeme tieto funkcie pomocou jednotkovej kružnice alebo cez nekonečné rady.



$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

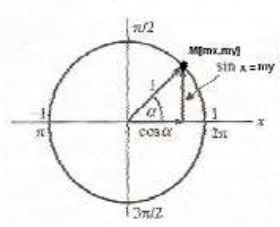


Cyklometrické funkcie - pseudoinverzné funkcie ku goniometrickým funkciám.
Inverzná funkcia k:

- sínusu na intervale $<-\pi/2, \pi/2>$ sa nazýva arkussínus (f(x) = arcsin x),
- kosínusu na intervale $<0, \pi>$ je arkuskosínus (f(x) = arccos x)

Sínus
f: y=sin x

Δ MAO pravouhlý ..... $\sin x = \frac{|MA|}{|MO|} = m_y$



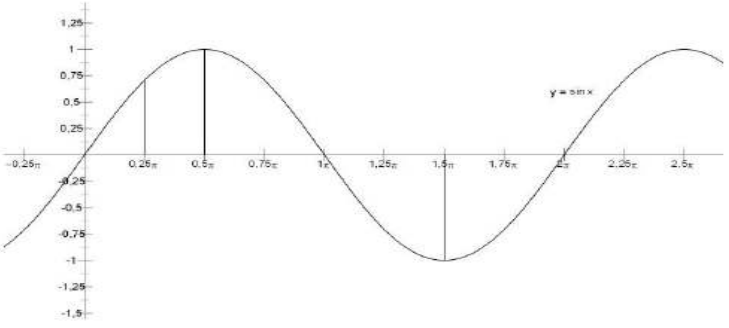
Def. Sínus je funkcia, ktorá každému reálnemu číslu x priradí druhú súradnicu bodu M: M_y = sin x.

Vlastnosti:

- D(f) = R
- H(f) = <-1;1>
- periodická, p=2π
- rastúca na $I = <-\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi>, k \in Z$
- klesajúca na $I = <\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi>, k \in Z$
- ohraničená; d=-1, h=1
- nepárna: sin x = - sin (-x)
- maximum v bodoch $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in Z$
- minimum v bodoch $(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi), k \in Z$

MO 11: GONIOMETRICKÉ FUNKCIE SIN a COS

Hodnoty:



	$\frac{0}{\pi}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
sin x	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Kosínus:
f: y=cos x

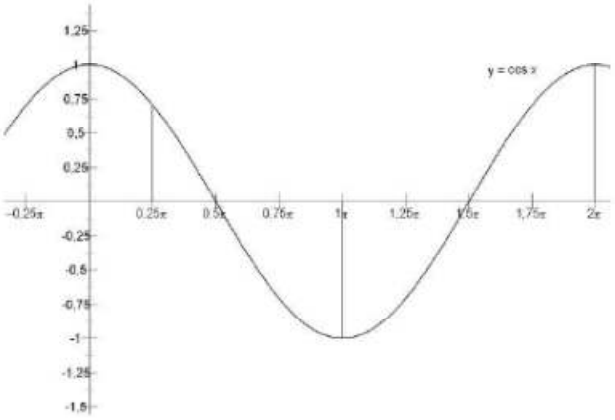
Δ MAO pravouhlý ..... $\cos x = \frac{|OA|}{|MO|} = m_x$

Def. Kosínus je funkcia, ktorá každému reálnemu číslu x priradí prvú súradnicu bodu M: M_x = cos x.

Vlastnosti:

- D(f) = R
- H(f) = <-1;1>
- periodická, p=2π
- rastúca na I = $<\pi + 2k\pi ; 2\pi + 2k\pi)$, k∈ Z
- klesajúca na I = $< 0 + 2k\pi ; \pi + 2k\pi)$, k∈ Z
- ohraničená; d=-1, h=1
- párna: cos x = cos (-x)
- maximum v bodoch (2kπ), k∈ Z
- minimum v bodoch ($\pi + 2k\pi$), k∈ Z

Hodnoty:



	$\frac{0}{\pi}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
cos x	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Literatúra a zdroje:

Zdroje voľne prístupne internet..

Poznámka : práca neprešla jazykovou úpravou a je možné že sa v nej vyskytnú chyby ak na niektoré dôjdete napíšte mailovú adresu: ingmatematik@gmail.com